# Zjemnělá složitost

5 January, 2021 13:23

$k$-CNF ... $\psi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$

klauzule $C_i = x_{i,1} \vee \neg x_{i,2} \vee \dots \neg x_{i,k}$

každá klauzule obsahuje $\leq k$ literálů.

$k$-SAT $= \{\langle \psi \rangle ;$ $\psi$ je booleovská formule v $k$-CNF, která je splnitelná $\}$

Algoritmy pro $k$-SAT: $n$ ... počet proměnných
$m$ ... počet klauzulí

- $2^n \cdot m^{O(1)}$ ... triviální algoritmus
- $1.33^n \cdot m^{O(1)}$ ... algoritmus pro 3-SAT
- $2^{(1-\frac{O(1)}{k}) \cdot n} \cdot m^{O(1)}$ ... algoritmus pro $k$-SAT

Otázka: $\exists$ alg. pro $k$-SAT pracující v čase $2^{o(n)}$?

Domněnky:

Exponential Time hypothesis (ETH)

- $\exists \delta > 0$ t.ž. žádný algoritmus pro 3-SAT nepracuje v čase lepším než $2^{(1-\delta)n}$

Strong Exponential Time hypothesis (SETH)

- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists k \geq 1$ t.ž. $k$-SAT nemá algoritmus pracující v čase $2^{(1-\varepsilon)n}$.

Fakt: SETH $\Rightarrow$ ETH. (Důkaz netriviální)

Problém ortogonálních vektorů (OVP)

Dána množina vektorů $S \subseteq \{0,1\}^d$, $|S| = n$, existují $x, y \in S$ t.ž. $\langle x, y \rangle = 0$

$\hookrightarrow \sum_{i=1}^{d} x_i \cdot y_i$

Pozorování: OVP lze řešit v čase $O(n^2 \cdot \text{poly}(d))$.

O: Lze OVP řešit v čase $O(n^{2-\varepsilon} \text{poly}(d))$ pro nějaké $\varepsilon > 0$?

Věta: Pokud platí SETH, pak OVP nelze řešit v čase $O(n^{2-\varepsilon} \text{poly}(d))$ pro žádné $\varepsilon > 0$.

Dk: $k$-SAT zredukujeme na OVP tak, že $O(n^{2-\varepsilon} \text{poly}(d))$ alg pro OVP dá $2^{(1-\frac{\varepsilon}{2})n}$ alg pro $k$-SAT.

$k$-CNF $\quad \psi = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$

$d = m + 2$ $\qquad$ pro jednoduchost $n$ je sudé

pro každé ohodnocení proměnných $x_1 \dots x_{\frac{n}{2}}$

$a \in \{0,1\}^{n/2}$

vytvoříme vektor

$$u_a = 1\,0\,\underbrace{0/1\;0/1\;\dots\;0/1}_{m}$$

↳ $i$-tý bit je 0 pokud proměnné $x_1 \dots x_{\frac{n}{2}}$ při ohodnocení $a$ splňují klauzuli $C_i$ jinak je bit 1.

podobně $\forall b \in \{0,1\}^{n/2}$ ohodnocení $x_{\frac{n}{2}+1} \dots x_n$

vytvoříme vektor

$$v_b = 0\,1\,\underbrace{0/1\;0/1\;\dots\;0/1}_{m}$$

↳ $i$-tý bit je 0 pokud ohodnocení $b$ pro $x_{\frac{n}{2}+1} \dots x_n$ splňuje $C_i$

$\Rightarrow (u_a, v_b) = 0 \iff a, b$ tvoří splňující

ohodnocení $\psi$.

$\longrightarrow S = \{u_a : a \in \{0,1\}^{n/2}\} \cup \{v_b : b \in \{0,1\}^{n/2}\}$

$|S| = 2^{\frac{n}{2}+1} = N$

algoritmus běžící v čase $O(N^{2-\varepsilon} \cdot poly(n))$

pro OVP instance $S$, řeší $k$-SAT

v čase $O((2^{\frac{n}{2}})^{2-\varepsilon} \cdot poly(n)) =$

$= O(2^{n(1-\frac{\varepsilon}{2})} \cdot poly(n))$. ☒